Systemtheorie

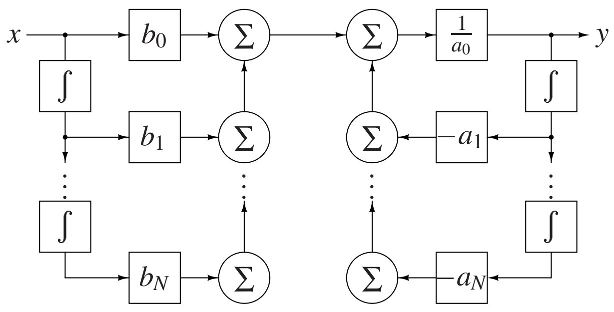
(Stand 8. März 2001)

Direktformen

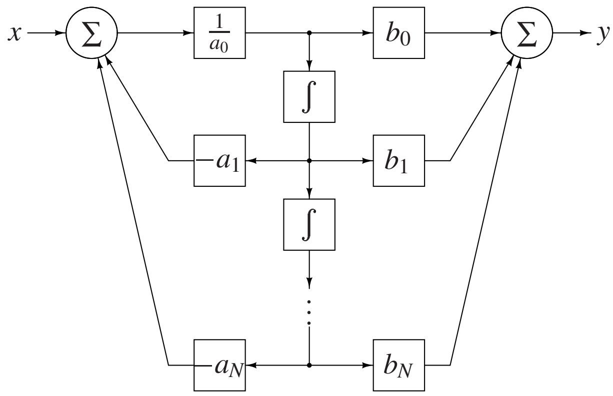
$$\left(\tfrac{d}{dt}\right)^N b_0 x + \cdots + \left(\tfrac{d}{dt}\right)^1 b_{N-1} x + b_N x = \left(\tfrac{d}{dt}\right)^N a_0 y + \cdots + \left(\tfrac{d}{dt}\right)^1 a_{N-1} y + a_N y$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=0}^{N} b_{N-i} \int_{(i)} x\,dt \qquad = \sum_{i=0}^{N} a_{N-i} \int_{(i)} y\,dt \qquad (2.4/\ 2.5)$$

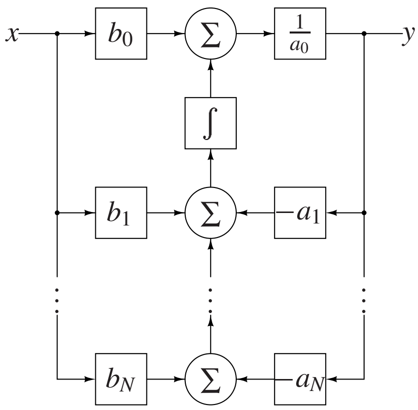
$$y = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{i=0}^{N} b_i \int_{(i)} x\,dt - \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{(i)} y\,dt \right)$$



Direktform I



Direktform II



Direktform III

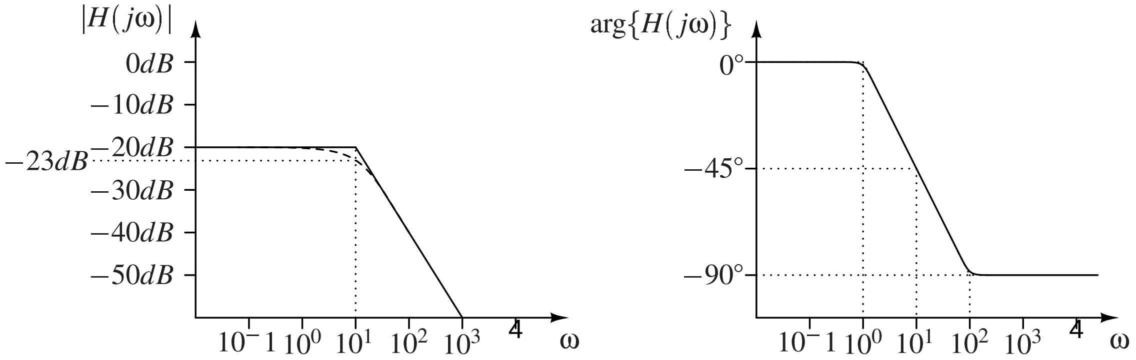
Bode- Diagramme (247ff)

Sind versuche, Systemverhalten mittels logarithmischem Papier und Bleistift anzunähern.
Betragsverläufe von Polen können durch eine Gerade bis $\omega = |s|$ und einen Abfall von $20\frac{dB}{\text{Oktave}}$ von da an dargestellt werden; Komplexe Polpaare erzeugen Überschwinger.
Nullstellen erzeugen an $0dB/\ 0°$ gespiegelte Phasen- und Betragsverläufe; die Verläufe mehrerer Pole/ Nullstellen können dank logarithmischer Auftragung einfach addiert werden.

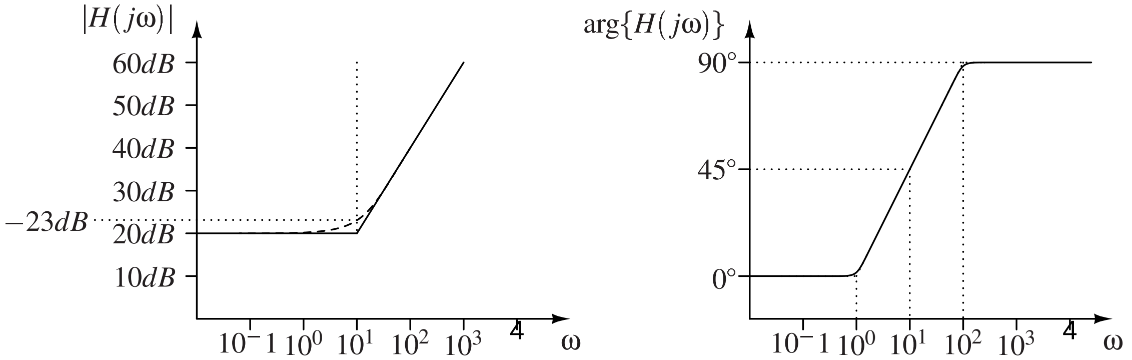
Kontinuierliche Systeme

Bode- Beispiele

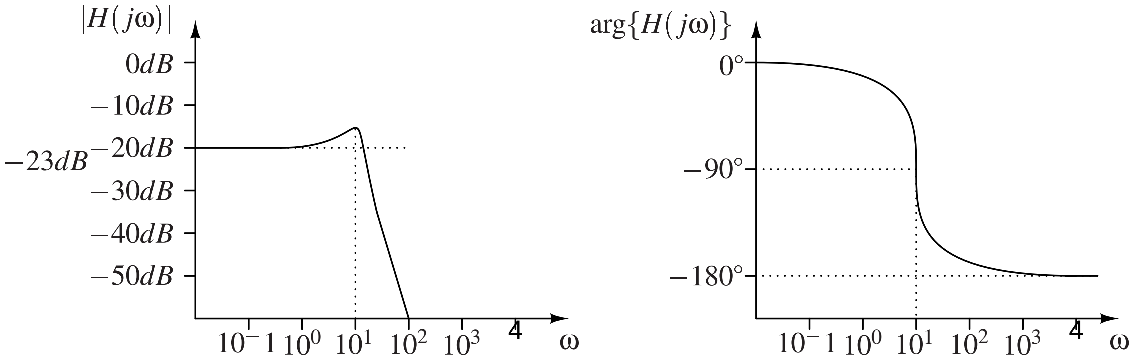
Pol bei $s_1 = -10$



Nullstelle bei $s_1 = -10$



Pole bei $s_{1/2} = -.2 \pm 10j$



Überschwinger umso stärker, je kleiner der Realteil der Pole; Berechnung für $\mathrm{Re}\, s$ ähnlich $\mathrm{Im}\, s$ über

$$H(j\omega) = K \frac{\prod_m (j\omega - s_{0m})}{\prod_n (j\omega - s_{pn})} \implies \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned} \log|H(j\omega)| &= \sum_m \log|j\omega - s_{0m}| - \sum_m \log|j\omega - s_{pm}| + logK \\ \arg H(j\omega) &= \sum_m \arg(j\omega - s_{0m}) - \sum_m \arg(j\omega - s_{pm}) \end{aligned} \tag{10.2}$$

Tabelle 1: Bode- Diagramme

Fourier- Transformation

$$\mathcal{F}\{x\} = \mathcal{L}\{x\}|_{s=j\omega} \qquad s = 0 \in \text{Kb von } \mathcal{F}\{x\} \tag{9.9}$$

Diskrete Systeme

Die F_*- Transformation

Die wichtigsten F_*- Korrespondenzen

Die Regeln

$$x[k-\kappa] \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j\omega\kappa}X(e^{j\Omega}) \quad \kappa \in \mathbb{Z} \qquad e^{j\Omega_0 k}x[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(e^{j(\Omega-\Omega_0)}) \quad \Omega_0 \in \mathbb{R}$$

$$x_1[k] * x_2[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\; X_1(e^{j\Omega})X_2(e^{j\Omega}) \qquad x_1[k]\cdot x_2[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\; X_1(e^{j\Omega}) \circledast X_2(e^{j\Omega})$$

$$ax_1[k] + bx_2[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\; aX_1(e^{j\Omega}) + bX_2(e^{j\Omega}) \qquad \sum_{k=-\infty}^{infty} |x[k]|^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2\pi}\int_{-} \pi^{\pi}|X(e^{j\Omega})|^2\,d\Omega$$

Transformation von Termen

$$\delta[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\; 1 \qquad \varepsilon[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \frac{1}{2}\perp\!\perp\!\perp\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$$

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet\; \perp\!\perp\!\perp\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) \qquad \sin\Omega_0 k \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{j}{2}\left(\perp\!\perp\!\perp\left(\frac{\Omega-\Omega_0}{2\pi}\right) + \left(\frac{\Omega-\Omega_0}{2\pi}\right)\right)$$

$$e^{j\Omega_0 k} \circ\!\!-\!\!\bullet\; \perp\!\perp\!\perp\left(\frac{\Omega-\Omega_0}{2\pi}\right) \qquad \cos\Omega_0 k \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2}\left(\perp\!\perp\!\perp\left(\frac{\Omega+\Omega_0}{2\pi}\right) + \left(\frac{\Omega-\Omega_0}{2\pi}\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1;\ k = 1\ldots N \\ 0,\ \text{sonst} \end{array}\right\} \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\sin\frac{N\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}\,e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}}$$

Tabelle 2: F_*-transformierte

$$X(e^{j\Omega}) = F_* x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\Omega} \tag{307}$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{jk\Omega}\,d\Omega \tag{12.16}$$

$x[k]$ gerade	$x[k]$ ungerade
$x[k]$ real $\Leftrightarrow X(e^{j\Omega})$ real	$x[k]$ real $\Leftrightarrow X(e^{j\Omega})$ imaginär
$x[k]$ Imaginär $\Leftrightarrow X(e^{j\Omega})$ Imaginär	$x[k]$ Imaginär $\Leftrightarrow X(e^{j\Omega})$ real
$X(e^{j\Omega})$ gerade	$X(e^{j\Omega})$ ungerade

Die z- Transformation

$$X(z) = \mathbb{Z}\{x[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \qquad ; z \in \text{Kb} \in \mathbb{C} \tag{18.1}$$

$$x[k] = \int_{-\infty}^{\infty} z^k X(z)\,dz$$

Die wichtigsten z- Korrespondenzen

Die Regeln

⚠ $z \to 0$, $z \to \infty$	$x[k-\kappa] \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{-\kappa}X(z)$	$a^k x[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X\left(\frac{z}{a}\right)$	$\frac{z}{a}\in \mathrm{Kb}\{x\}$
$\mathrm{Kb}x_1 \cap \mathrm{Kb}x_2$	$x_1[k] * x_2[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1(z)X_2(z)$	$kx[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ -z\frac{dX[z]}{dz}$	⚠ $z=0$
$\frac{1}{z}\in \mathrm{Kb}\{x\}$	$x[-k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(z^{-}1)$	$x_1[k]\cdot x_2[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2\pi j}\oint X_1(p)X_2\left(\frac{z}{p}\right)\frac{1}{p}\,dp$(?)	

$\mathrm{Kb}x_1 \cap \mathrm{Kb}x_2$ $\quad ax_1[k] + bx_2[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ aX_1(z) + bX_2(z)$

Transformation von Termen

$z\in\mathbb{C}$	$\delta[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$	$\varepsilon[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
$\|z\|>\|a\|$	$a^k\varepsilon[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z}{z-a}$	$-a^k\varepsilon[-k-1] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z}{z-a}$	$\|z\|<\|a\|$
$\|z\|>1$	$k\varepsilon[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z}{(z-1)^2}$	$ka^k\varepsilon[k] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$\|z\|>1$	$\cos\Omega_0 k \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z(z-\cos\Omega_0}{z^2-2z\cos\Omega_0+1}$	$\sin\Omega_0 k \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z\sin\Omega_0}{z^2-2z\cos\Omega_0+1}$	$\|z\|>1$

Tabelle 3: z-transformierte

Stabilität

Bedingung für

$$|z_n| < 1 \qquad \mathrm{Re}\, s_n < 0$$

Bilineare Transformation

$$z = \frac{s+1}{s-1} \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{z+1}{z-1}$$
$$|z| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\, s < 0 \qquad (16.21)$$

Kausale Signale

$$h = h_0\delta(0) + g(t) \qquad ; g(t) = 0\ \forall\ t<0; g(t)\in\mathbb{C}$$

$$\mathrm{Re}\,H = \mathrm{Re}(h_0) + \mathcal{H}\{\mathrm{Im}\,H\}$$
$$\mathrm{Im}\,H = \mathrm{Im}(h_0) - \mathcal{H}\{\mathrm{Re}\,H\} \qquad (15.23/15.22)$$

$$\mathcal{H}\{X\} = \frac{1}{\pi}X * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X}{\omega-\eta}\,d\eta \qquad \mathcal{H}_*\{X\} = X \circledast \frac{1}{2\pi\tan\frac{\Omega}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{X}{\tan\frac{X}{\Omega-\eta}2} \qquad (15.19/15.32)$$

Stochastik

Erwartungswerte 1. Ordnung (414ff)

sind das gewichtete Mittel Aller möglichen Eingangsfunktionen $x(t)$ eines Zufallsprozesses zum Zeitpunkt t.

$$E\{f(x(t))\} = \lim_{N\to\infty} \sum \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i(t)) \tag{17.3}$$

Beispiele hierfür sind der lineare Erwartungswert $\mu_x(t)$, bei dem $f(x) = x$ ist, und der quadratische Mittelwert ($f(x) = x^2$), der die mittlere Eingangsleistung zum Zeitpunkt t angibt.

Rechenregeln (417)

$$E\{ax(t) + by(t)\} = aE\{x(t)\} + bE\{y(t)\} \tag{17.6}$$

$$E\{d(t)\} = d(t) \qquad ; d(t) \text{ deterministisch} \tag{17.7}$$

Erwartungswerte 2. Ordnung (418)

betrachten das Zufallssignal an 2 verschiedenen Zeitpunkten.

$$E\{f(x(t_1), x(t_2))\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i(t_1)), x_i(t2)) \tag{17.9}$$

Wichtigstes Beispiel ist die

Autokorrelationsfunktion

$$\varphi_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1), x(t_2)\} \qquad ; f(x,y) = x \cdot y \tag{17.10}$$

$$\varphi_{xx}(t,t) = E\{x^2(t)\} \tag{17.11}$$

Stationarität (419ff)

Wenn Alle gewichteten gewichtete AKF nur von der Differenz $\tau = t_2 - t_1$ abhängen, ist der Prozess stationär. Gilt dies nur für

$$f(x(t_1), x(t_2)) = x(t_1)x(t_2) \text{ und } f(x(t_1), x(t_2)) \ , \tag{17.16/17.17}$$

so ist der Prozess schwach stationär zu nennen.

Ergodizität (422ff)

Wenn die Erwartungswerte 1.

$$\overline{f(x_i(t))} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x_i(t)) \tag{17.18}$$

und 2.

$$\overline{f(x_i(t), x_i(t-\tau))} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x_i(t), x_i(t-\tau)) \tag{17.19}$$

Ordnung jeder Einzelnen möglichen Funktion und Gewichtung mit den konventionellen Erwartungswerten übereinstimmen, ist der Prozess ergodisch; wenn wieder nur für Obige Gewichtungsfunktionen, schwach.

Autokovarianzfunktionen (429)

erhält man durch Einfaches Abziehen des Quadratischen Mittelwerts von der Autokorrelationsfunktion:

$$\psi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) - \mu_x^2 \tag{17.39}$$

$\psi_{xx} \geq 0$; grössere Werte deuten höhere Selbstverwndschaft des Signals an.

Leistungsdichtespektrum

$$\Psi = \mathcal{F}\{\phi\}$$

Rechenregeln

$$y(t) = f(t) + g(t)$$

$$\varphi_{yy} = \varphi_{ff} + \varphi_{fg} + \varphi_{gf} + \varphi_{gg} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \Psi_{yy} = \Psi_{ff} + \overbrace{\Psi_{fg} + \Psi_{gf}}^{2\mathrm{Re}\Psi_{fg}} + \Psi_{gg}$$

$$\phi_{fy} = \phi_{ff} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \Psi_{fy} = \Psi_{ff}$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{xx} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \Psi_{xx} \\
\varphi_{xy} = h^* * \varphi_{xx} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \Psi_{xx}H^* = \Psi_{xy} \\
\varphi_{yx} = h * \varphi_{xx} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \Psi_{xx}H = \Psi_{yx} \\
\varphi_{yy} = \phi_{hh} * \varphi_{xx} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \Psi_{xx}|H|^2 = \Psi_{yy}
\end{aligned}$$

Diese Formelsammlung kann und soll weder den Besuch der Vorlesung, noch

Einführung in die Systemtheorie

von

Professor Dr.-Ing. Bernhard Girod,
Priv.- Doz. Dr.-Ing. habil. Rudolf Rabenstein und
Dipl.-Ing. Alexander Stenger

ersetzen, woher auch die Quellenangaben sind. Fehler bitte an Gunter Königsmann ⟨gunter.koenigsmann@gmx.de⟩ melden.