Stochastik

——(Stand 19. November 2000)——

Die Notation

Zeichen

$A \in B$	A in B	$A \subset B$	A Untermenge von B
$A \cap B$	A und B	$A \cup B$	A oder (und/oder) B
$A \oplus B$	A Exklusiv oder B	$A \circ B$	A verknüpft mit B
$\mathcal{P}(M)$	Potenzmenge von M	$(A \in B)$	Alle Bedingungen für $A \in B$
$1_B(x)$	$\begin{cases} 1; \ x \in B \\ 0, \ \text{sonst} \end{cases}$		

Variablen

Ω	Sicheres Ergebnis	$\emptyset = \overline{\Omega}$	Unmögliches Ergebnis
P	Wahrscheinlicheitsverteilung Wahrscheinlicheit $= \lim\limits_{n \to 0} H_n$	$\mathcal{A}$	Die eingetretenen Ereignisse
N	Häufigkeit	H	relative Häufigkeit $H = \frac{N_n(A)}{n}$
$\lambda(B)$	Lebesque's Maß der Menge B	Z	Einzelexperiment

Algebra

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$P(A|B) = \frac{P_n(A \cap B)}{P_b(B)} \tag{2.21}$$

Wahrscheinlichkeit, dass A eintrifft, wenn B eingetroffen

Reihengrenzwerte $(n \to \infty)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Zufallsgrößen (18)

Zufallsgrößen sind Transformationen von einem Wahrscheinlichkeitsraum (x- und y- Position des Pfeils) zu einem Anderem (Dartpunkte).
Die Wahrscheinlichkeit, mit dem Dartpfeil in einen Bereich B zu treffen ist

$$P(X \in B) = \int_B \varphi(x)\, dx \qquad \text{(Bronnstein, 1026)}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(x)$ Die Transformation mit der Grösse X wird folgendermaßen notiert:

$$(\Omega_1,\ \mathcal{A}_1,\ P) \xrightarrow{X} \left(\Omega_2,\ \mathcal{A}_2,\ P^X\right) \tag{19}$$

Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\left(X \in \tilde{\Omega}\right) &= \Omega \\
\left(X \in \overline{\tilde{A}}\right) &= \overline{\left(X \in \tilde{A}\right)} \\
\left(X \in \bigcap_k \tilde{A}_k\right) &= \bigcap_k \left(X \in \tilde{A}_k\right) \\
\left(X \in \bigcup_k \tilde{A}_k\right) &= \bigcup_k \left(X \in \tilde{A}_k\right) \\
\left(X \in \sum_k \tilde{A}_k\right) &= \sum_k \left(X \in \tilde{A}_k\right)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$P^X(\tilde{A}) = P(X \in \tilde{A}) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&(\Omega_1,\ \mathcal{A}_1,\ P) \xrightarrow{X} \left(\Omega_2,\ \mathcal{A}_2,\ P^X\right) \xrightarrow{X} \left(\Omega_3,\ \mathcal{A}_3,\ P^Y\right) \\
\Longrightarrow\ &(\Omega_1,\ \mathcal{A}_1,\ P) \xrightarrow{Z=Y\circ X} \left(\Omega_3,\ \mathcal{A}_3,\ P^Y\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

Zufallsvariablen

X ist eine Zufallsvariable, wenn gilt:

$$(X \in B) \in \mathcal{A}\ \forall\, B \subset \mathbb{R} \tag{3.49}$$

oder einfacher

$$(X \leq t) \in \mathcal{A}\ \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{19}$$

Zufallsvektoren

Dito, jedoch für

$$(X \in B) \in \mathcal{A} \; \forall \, B \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \tag{3.49}$$

Marginalverteilungen P^{X_k} (20)

sind die Verteilungen der k- ten Komponente eines Zufallvektors X

$$P^{X_k}(B) = P^X(X_k \in B) = \int 1_{(X_k \in B)}(x) f(x)\, dx \tag{20}$$

Die Marginalverteilungen entstehen durch wegintegrieren Aller bis auf das k-te Element eines Zufallsvektors über den Wahrscheinlichkeitsraum.

Vgl.: $$\varphi_{X_\mu}(x_\mu) = \int \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$$ (Bronnstein, 1027)

$1_{(X_k \in B)} = 1$ in den Integrationsgrenzen.

Bedingung für unabhängigkeit der X_μ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \tag{21}$$

Transformation von Dichten (22–24)

Wenn jetzt — neben der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(X)$ nicht mehr die — einfach zu verwendenden — Zufallsvariablen X_1 und X_2, sondern $Y_1 = G_1(X_1, X_2)$ und $Y_2 = G_2(X_1, X_2)$ bekannt sind, kann man die Transformation

$$\left(\mathbb{R}^n,\, \mathcal{B}_N,\, P^X\right) \xrightarrow{G} \left(\mathbb{R}^n,\, \mathcal{B}_N,\, P^G\right)$$

verwenden.

G transformiert die Menge M, in der sich Alle X befinden zur Menge M^*.

Die Funktionaldeterminante dieser Abbildung ist

$$J_G(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{dG_1}{dx_1} & \cdots & \frac{dG_1}{dx_n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \frac{dG_n}{dx_1} & \cdots & \frac{dG_n}{dx_n} \end{pmatrix} \qquad ,$$

— die Wahrscheinlichkeitsdichte für Y ist also

$$g(Y) = \begin{cases} f(G^{-1}(Y)) \left| \frac{1}{J_G\left(G^{-1}(Y)\right)} \right| & ; Y \in M^*; \\ 0 & ; \text{sonst.} \end{cases}$$

Bedingungen dafür: (22)

$f(X) = 0 \; \forall \; X \notin M$
$J_G(X)$ existiert $\forall X \in M$
$G(X)$ stetig und bijektiv $\forall X \in M$

Das P- Integral

$$\int X(\omega)\, P(d\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} X(\omega) f(\omega)\, d\omega \tag{3.63}$$

($f(X)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, und P muß eine absolutstetige Verteilung sein.)

$$(\Omega,\ \mathcal{A},\ P) \xrightarrow{Z=Y\circ X} \left(\mathbb{R},\ \mathcal{B},\ P^Z\right)$$

$$\Longrightarrow \int Y(X(\omega))\, P(d\omega) = \int Y(\omega)\, p^X(d\omega) \tag{3.64}$$

Verteilungen

Mittelwert (Erwartungswert)

$$m_1(P) = \mathcal{E}X = \int X f(X)\, dX = \int X(\omega)\, P(d\omega) \tag{2.40, 26}$$

(für $x = m_1(P)$ ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, sofern ein Mittelwert existiert.)

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(aX + bY + c) = a\,\mathcal{E}X + b\,\mathcal{E}Y + c \\ &\mathcal{E}(XY) = \mathcal{E}X\,\mathcal{E}Y \end{aligned} \tag{26}$$

2. Moment

$$m_2(P) = \int x^2 f(x)\, dx \tag{2.41}$$

Varianz

$$\mathrm{var}(X) = \widehat{m}_2(P) = \int (X - m_1)^2 f(x)\, dx = \mathcal{E}(X.\mathcal{E}X)^2 \tag{2.42}$$

$$\widehat{m}_2(P) = m_2 - (m_1)^2. \qquad \text{Steinerscher Satz} \tag{17}$$

(50% der Meßwerte haben mindestens/höchstens diese Abweichung vom Mittelwert).

Kovarianz

$$\operatorname{cov} X_1, X_2 = \mathcal{E}(X_1 - \mathcal{E}X_1)\mathcal{E}(X_2 - \mathcal{E}X_2) = \mathcal{E}(X_1X_2) - (\mathcal{E}X_1)(\mathcal{E}X_2)$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{var}(aX+b) = a^2 \operatorname{var} X \\
&\operatorname{var}(X_1+X_2) = \operatorname{var} X_1 + 2\operatorname{cov}(X_1,X_2) + \operatorname{var} X_2 \\
&\operatorname{cov}(Y,Y) = \operatorname{var} Y \\
&\operatorname{cov}(X_1,X_2) = \operatorname{cov}(X_2,X_1) \\
&\operatorname{cov}(aX,bY) = a^T \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X_1,Y_1) & \cdots & cov(X_1,Y_n) \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \operatorname{cov}(X_n,Y_1) & \cdots & cov(X_n,Y_n) \end{pmatrix} b \\
&|\operatorname{cov}(X_1,X_2)| \le \sqrt{\operatorname{var} X_1 \operatorname{var} X_2} \qquad \text{(Cauchy- Schwarz)}
\end{aligned} \tag{27}$$

$|\operatorname{cov}(X_1,X_2)| = \sqrt{\operatorname{var} X_1 \operatorname{var} X_2}$, wenn

$$\exists\, a_1,\ a_2,\ c \mid a_1X_1(\omega) + a_2X_1(\omega) = c\ \forall\ \omega \tag{27}$$

Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig, gilt

$$\operatorname{cov}(X_1,X_2) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{var}(X_1+X_2) = \operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} X_2 \tag{27}$$

Korrelationskoeffizient ρ

$$\rho(X_!, X_2) = \frac{cov(X_1,X_2)}{\sqrt{\operatorname{var} X_1 \operatorname{var} X_2}} \tag{27}$$

$0 \le \rho \le 1$ ist ein skalenunabhängiges Maß für die Abhängigkeit Zweier Variablen.
X_1 unabhängig von $X_2 \;\Rightarrow\; \rho = 0$; $\rho = 0 \;\not\Rightarrow\; X_1$ unabhängig von X_2

Verteilungsfunktion

$$F(t) = P] - \infty, t] = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dt$$

Wahrscheinlichkeitsdichten

Bedingung: (16)

$$\int f(x)\,dx = 1$$

Und $f(x)$ Lebesque- integrierbar.

, spezielle

$$f(x) = \begin{cases} 0;\ x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x};\ x > 0 \end{cases} \quad \text{Exponentialverteilung}$$

$$\varphi(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{Normalverteilung} \qquad (16, 18)$$

Exponentialverteilung $P(A_{s+t}|A_s) = P(A_t)$

Normalverteilung $\int \varphi(t)\,dt = \Phi(t)$ nicht formelmässig anzugeben.

WARNUNG

Dies ist meine Formelsammlung, und ist weder komplett noch dazu geeignet, den Besuch der Vorlesung,

Stochastik für ET

von

Friedrich Graef

zu ersetzen.

Sie ist vollständig vom zugehörigem Script abgeschrieben, aus dem auch die Quellenangaben stammen. Fehler etc. bitte an Gunter Königsmann ⟨gunter.koenigsmann@gmx.de⟩mailen.