Die Fourier- Transformation

——(Stand 27. Mai 2001)——

Die Grundidee dieser — manchmal unheimlich praktischen — Transformation ist, dass man — wenn man Alle Sinus- und Kosinus- Funktionen nimmt, man jede Funktion[1] daraus zusammensetzen kann.

periodische Funktionen

Außerdem braucht man, um eine mit der Länge l periodische Funktion $f(x)$ zusammenzusetzen natürlich nur Funktionen mit der Selben Periode, also $\sin 2\pi nlx$ und $\cos 2\pi nlx$; $n \in \mathbb{R}$.
Für $f(x)$ folgt also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2\pi nlx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin 2\pi nlx$$

Die Ermittlung der a_n und b_n erfolgt durch Multiplikation[2] dieser Gleichung mit $\sin 2k\pi x$...

$$f(x) \cdot \sin 2k\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2\pi nlx \cdot \sin 2k\pi x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin 2\pi nlx \cdot \sin 2k\pi x$$

...und Integration über eine Periode...

$$\int_0^l f(x) \cdot \sin 2k\pi x\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^l \cos 2\pi nlx \cdot \sin 2k\pi x\, dx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^l \sin 2\pi nlx \cdot \sin 2k\pi x\, dx$$

...wobei es vollkommen egal ist, wohin man die Integrationsgrenzen setzt, wenn sie den Abstand l haben.

Die Beziehungen

$$\int_0^l \sin 2\pi nlx \cdot \sin 2k\pi x\, dx = \begin{cases} 2\pi, & k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} ; \quad \int_0^l \cos 2\pi nlx \cdot \sin 2k\pi x\, dx = 0\ \forall n, k$$

vereinfachen dies zu

$$\int_0^l f(x) \cdot \sin 2n\pi x\, dx = 2\pi b_n \ .$$

Parallel dazu erhält man auch

$$\int_0^l f(x) \cdot \cos 2n\pi x\, dx = 2\pi a_n \ .$$

Ein Anderer weg, dasselbe Ergebnis zu Erhalten, ist es, das Skalarprodukt

$$f(x) \bullet g(x) = \int_0^l f(x) \cdot g(x)\, dx$$

einzuführen[3], und davon auszugehen, dass man aus Allen zueinander senkrechten ($f \bullet g = 0$) infragekommenden (mit l periodischen) Sinus- und Kosinus- Funktionen (sind Alle zueinander senkrecht) jede in Frage kommende Funktion zusammensetzen kann.

nichtperiodische Funktionen

Nagut... ...und wenn man keine Periodischen Funktionen verwendet, kommen eben *Alle* Sinus- und Kosinus- Funktionen in Frage, und das Ergebnis lautet

$$f(x) = \int_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2\pi nlx\, dn + \int_{n=0}^{\infty} b_n \sin 2\pi nlx\, dn$$

...und mit den Beziehungen

[1]Nagut. Fast jede. Polstellen geben Probleme, und Informationen über Punkte mit Unstetigkeiten gehen verloren.
[2]Quelle: Prof. Dr. M. Albach
[3]Quelle: Akad. Dir. H. Raum

$$f(x) \bullet g(x) = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{f(x)\cdot g(x)}{t}\, dx$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{\sin 2\pi n l x \cdot \sin 2k\pi x}{t}\, dx = \begin{cases} 2\pi, & k = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}; \quad \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{\cos 2\pi n l x \cdot \sin 2k\pi x}{t}\, dx = 0 \;\forall n, k$$

die Parameter

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{f(x)}{t} \cdot \sin 2n\pi x\, dx = 2\pi b_n$$

und

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{f(x)}{t} \cdot \cos 2n\pi x\, dx = 2\pi a_n \ .$$

Der Limes ist notwendig, da ansonsten das Integral Probleme macht.

Die Exponentialform

$a \sin x + b \cos y$ lässt sich natürlich auch zu einer Exponentialfunktion $ce^{j\omega}$; $\omega \in \mathbb{R}$ zusammenfassen.

Die Parameter a und b werden nun zu einem Einzigem Parameter c zusammengefasst, der Sinus und der Kosinus in einer Exponentialfunktion, der Rest sollte nun ein Leichtes sein ;-)

Dies ist ein einfaches, einfach zum Spass geschriebenes Kochbuch, dass grob das ,was‘ erklären soll, und mehr nicht. Gibt es genug drüber, wollte nur nochmal ein weiteres Paper zu schreiben und habe irgendwann das Interesse bei verloren, dran ;-)
Fehler bitte dennoch an Gunter Königsmann ⟨gunter.koenigsmann@gmx.de⟩ melden,

Gunter Königsmann.