1. Vorwort

Dieses TEX- Dokument basiert vollständig auf

Grundlagen der Elektrotechnik 2 von
Prof. Dr.- Ing Dr. H.c. Rolf Unbehauen

veröffentlicht im Springer-Verlag

Es ist nur als Formelsammlung meinerseits gedacht, und beleuchtet keinesfalls die Hintergründe (Stehen im Buch, und werden in der Vorlesung vermittelt), noch soll es diese ersetzen können.
Falls ich Fehler gemacht habe, obwohl ich fast Alles mit dem Buch verglichen habe, bitte mir melden. Ich habe dieses Dokument auch als Kontrolle meinerseits geschrieben.

Gunter Königsmann ⟨gunter.koenigsmann@gmx.de⟩

Oh... Noch etwas: Ein paar Formeln habe ich abgeändert, damit sie zu meinem Text passen. Es wurden trotzdem Quellenangaben abgeruckt. Vorsicht!

Differentialgleichungen

Kochbuch für den Anfang von GETIII

$$a_1\ddot{f}+a_2\dot{f}+a_3f=x(t) \tag{1}$$

2. Homogene Lösung

(Die Homogene Lösung bezeichnet die Abweichung des Netzwerkes von eingeschwungenem Zustand durch das Einschwingen; k hängt von der partikulären Lösung, und den Anfangsbedingungen ab.)

$$a_1\ddot{f}+a_2\dot{f}+a_3f=0 \tag{2}$$

Annahme (Geht immer):

$$f=ke^{pt}$$

$$\Rightarrow \dot{f}=kpe^{pt};\ \ddot{f}=kp^2e^{pt}$$

in (1):

$$a_1p^2ke^{pt}+a_2pke^{pt}+a_3ke^{pt}=0$$

$$a_1p^2+a_2p+a_3=0$$

...und p berechnen. Die Homogene Lösung lautet dann:

$$f_h=ke^p \tag{S. 19}$$

Mehrere p sind möglich, f_h ist dann

$$f_h=\sum k_{hom,i}e^{p_i};$$

Konjugiert komplexe p haben die Gleichen k.

Falls das Selbe p mehrmals vorkommt (nennen wir es p_1), muss das Erste e^{p_1} mit t^0 multipliziert werden, das 2. e^{p_1} mit t^1, etc.[1]

3. Partikuläre Lösung

Auch hiervon gibt es beliebig viele, die sich durch die Addition von homogenen Lösungen ineinander überführen lassen. Eine mögliche partikuläre Lösung ist —wenn vorhanden— der Eingeschwungene Zustand des untersuchten Netzwerkes.)

Methode für $x(t)$ aus e-Funktionen

1. $x(t)$ in Terme $x_n(t)$ aufteilen. Die $f_{s,n}(t)$ in untenstehender Gleichung sind zu diesen identisch, außer sie sind in $f_h(t)$ enthalten, in welchem Fall sie noch mit t multipliziert werden müssen.
2. Das Ergebnis in (2) einsetzen:

$$k_n\ddot{f}_{s,n}(t) + k_n\dot{f}_{s,n}(t) + k_n f_{s,n}(t) = x_n(t) = v_n e^{p_n t}$$

   ... und die (Ab jetzt Standart-) Annahme:

$$f_{s,n}(t) = ke^{p_n t}$$

$$\Rightarrow k_n\left(a_1 p_n^2 + a_2 p_n + a_1\right) = v_n$$

3. k_n berechnen, und das Ganze mit den Restlichen Termen wiederholen.
   ... auch hier haben konjugiert komplexe $x_n(t)$ dieselbe Konstante k_n.

$$f_p(t) = \sum k_n f_{s,n}(t)$$

Methode für Polynomiales $x(t)$ mit maximaler Potenz m

Der Ansatz

$$f(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots + k_m p^m$$

eingesetzt in (1) führt automatisch auf die partikuläre Lösung.

4. Gesamte Lösung

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t)$$

(Beide Lösungen können aufgrund der Linearität des Gleichungssystems addiert werden, sofern das System stabil ist.) ...

Die fehlenden Konstanten müssen anhand der Vorgaben ermittelt werden.

[1] Um es selbst zu sehen, f einfach als Potenzreihe entwickeln: Stimmt wirklich

Die modifizierten allgemeinen Netzwerklösverfahren

5. Die Normalform

Nehmen wir zuerst folgendes Gleichungssystem aus dem Knotenpotential- oder Maschenstromverfahren:

$$\left(\mathbb{G}+\mathbb{H}\frac{d}{dt}\right)\mathbb{z}=\mathbb{c}\,x(t)\quad;\mathbb{c}\in\mathbb{C} \tag{6.65}$$

...Bringen es in diese Form:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11}+\mathbb{E}\frac{d}{dt} & \mathbb{A}_{12}+\mathbb{B}\frac{d}{dt} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix}\mathbb{z}=\mathbb{c}\,x(t) \tag{6.66}$$

Dann bringt (siehe Grundlagen der Elektrotechnik 2 von Rolf Unbehauen) folgende Substitution:

$$\boldsymbol{\zeta}=\begin{pmatrix} \mathbb{E} & \mathbb{B} \\ 0 & \mathbb{E} \end{pmatrix}\mathbb{z} \tag{6.70}$$

das Gleichungssystem in folgende Form:

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11}+\mathbb{E}\frac{d}{dt} & \mathbb{A}_{12}-\mathbb{A}_{11}\mathbb{B}_1 \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22}-\mathbb{A}_{21}\mathbb{B}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}_1 \\ \boldsymbol{\zeta}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbb{c}_1 \\ \mathbb{c}_2 \end{pmatrix}x(t) \tag{6.72}$$

Dies kann man nun in der Regel in die Differentialgleichung

$$\left(\mathbb{E}\frac{d}{dt}-\mathbb{A}\right)\boldsymbol{\zeta}_1=\mathbb{B}\,(\mathbb{c}_1)\,x(t) \tag{6.73a}$$

mit

$$\mathbb{A}=(\mathbb{A}_{12}-\mathbb{A}_{11}\mathbb{B}_1)\,(\mathbb{A}_{22}-\mathbb{A}_{21}\mathbb{B}_1)^{-1}\,\mathbb{A}_{21}-\mathbb{A}_{11} \tag{6.76a}$$

$$\mathbb{B}=\mathbb{c}_1+(\mathbb{A}_{11}\mathbb{B}_{12}-\mathbb{A}_{12})\,(\mathbb{A}_{22}-\mathbb{A}_{21}\mathbb{B}_{12})^{-1}\,\mathbb{c}_2 \tag{6.76b}$$

und die algebraische Gleichung

$$\boldsymbol{\zeta}_2=(\mathbb{A}_{22}-\mathbb{A}_{21}\mathbb{B}_{12})^{-1}\,(\mathbb{c}_2\,x(t)-\mathbb{A}_{21}\boldsymbol{\zeta}_1) \tag{6.73}$$

auflösen.

6. Die homogene Lösung

...Spätestens jetzt hat man eine brauchbare DGL der Form

[2]Konvention für Variablenbenennung:

$\mathbb{K}^{(m)}$	m-ter Eigenvektor für Einen Eigenwert
$\mathbb{K}^{(m)}_{(x)}$	x-ter Hauptvektor für den m-ten Eigenvektor
$\mathbb{Doppelter}$ Aufstrich	Die Variable ist eine Matrix

$$\left(\mathbb{H}\frac{d}{dt} - \mathbb{G}_{11}\right)\boldsymbol{\zeta} = \mathbb{x};\, \mathbb{x} = \mathbb{c}\cdot x(t) \tag{6.65}$$

gewonnen, mit einer Zeile pro Energiespeicher, und kann die homogene Seite lösen:

Die Eigenfrequenzen des Netzwerkes p_n erfüllen folgende Bedingung:

$$\det(p\mathbb{H} - \mathbb{G}) = 0 \tag{6.87}$$

... Dies gilt natürlich für das Erste, sowie für das Letzte Obige Gleichungssystem.
Die Eigenvektoren $\mathbb{K}^{(m)}$ rechnet man folgendermaßen aus:

$$(\mathbb{H} - p_n\mathbb{E})\,\mathbb{K}^{(m)} = 0 \tag{6.88}$$

Folgende Bedingungen gibt es für $\mathbb{K}$: Für jeden Eigenwert sind die $\mathbb{K}^{(m)}$ linear unabhängig, und $\mathbb{K}^{(m)}$ für konjugiert komplexe p_n sind auch konjugiert komplex.

Mit Hilfe der so gewonnenen $\mathbb{K}^{(m)}$ kann man schon die Meisten Lösungsvektoren ermitteln:

$$\boldsymbol{\zeta}^{(m)} = e^{p_n t}\,\mathbb{K}^{(m)} \tag{6.90}$$

Leider benötigt man, wenn man bei einem N- fachem μ- tem Eigenwert d Eigenvektoren ermitteln konnte, noch $N-d$ Hauptvektoren, die nach den Folgenden Formeln ermittelt werden können:

$$\begin{array}{lrll}
(p_n\mathbb{E} - \mathbb{A})\,\mathbb{K}^{(m)}_{(N-1)} + & 0 & & = 0 \\
(p_n\mathbb{E} - \mathbb{A})\,\mathbb{K}^{(m)}_{(N-2)} + & (N-1) & \mathbb{K}^{(m)}_{(N-1)} & = 0 \\
(p_n\mathbb{E} - \mathbb{A})\,\mathbb{K}^{(m)}_{(N-3)} + & (N-2) & \mathbb{K}^{(m)}_{(N-2)} & = 0 \\
\vdots & & & \\
(p_n\mathbb{E} - \mathbb{A})\,\mathbb{K}^{(m)}_{(1)} + & 2 & \mathbb{K}^{(m)}_{2} & = 0 \\
(p_n\mathbb{E} - \mathbb{A})\,\mathbb{K}^{(m)} + & 1 & \mathbb{K}^{(m)}_{1} & = 0
\end{array} \tag{6.91}$$

Die resultierenden Lösungsvektoren sind hier:

$$\boldsymbol{\zeta}^{(m)} = e^{p_n t}\left(\mathbb{K}^{(m)} + t\,\mathbb{K}^{(m)}_1 + \cdots + t^{(d)}\,\mathbb{K}^{(m)}_{(d)}\right) \tag{6.90}$$

Also ist die Fundamentallösung $\mathbb{F}$

$$\mathbb{F} = \left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)}\ \boldsymbol{\zeta}^{(2)}\ \cdots\ \boldsymbol{\zeta}^{(d)}\ \boldsymbol{\zeta}^{(d+1)}\ t\,\boldsymbol{\zeta}^{(d+1)}_1\ t^2\,\boldsymbol{\zeta}^{(d+1)}_2 \cdots t^{N-d}\boldsymbol{\zeta}^{(d+1)}_{N-d}\right) \tag{6.92}$$

oder

$$\mathbb{F} = \left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)}\ \boldsymbol{\zeta}^{(2)}\ \cdots\ \boldsymbol{\zeta}^{(N)}\right);\, N = d$$

7. Konstante Erregung

Die Partikuläre Lösung

$$\mathbb{G}\,\boldsymbol{\zeta}_p = \mathbb{c}, \text{ da } x(t) = 1 \text{ und } \frac{dx(t)}{dt} = 0 \tag{6.95}$$

Führt zu folgender Gesamtlösung:

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbb{F}(t) \cdot \mathbb{k} + \boldsymbol{\zeta}_p$$

8. Lineare Erregung $\mathbb{x} = \mathbb{c}t + \mathbb{d}$

Der Ansatz

$$\mathbb{z} = \mathbb{z}_1 = \mathbb{z}_2 t$$

führt zu

$$(\mathbb{G}t + \mathbb{H})\,\mathbb{z} = \mathbb{c}t + \mathbb{d}$$

Zum Ansatz für Polynomiale Erregung siehe 1- Dimensionale DGLs.

9. Exponentielle Erregung (58)

$$x(t) = e^{pt}$$

Wenn p keinem Eigenwert des Netzwerkes entspricht, erhält man ζ_p aus

$$(\mathbb{G} + p\mathbb{H})\,\mathbb{z} = \mathbb{c}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_p(t) = e^{pt}\mathbb{z}\ .$$

10. Harmonische Erregung

Wenn die Erregungsfrequenz p_0 keinem Eigenwert des Netzwerkes entspricht, ist das Gleichungssystem

$$(\mathbb{G} + \omega\mathbb{H})\,\underline{\mathbb{Z}}_p = (\underline{\mathbb{X}}) \tag{6.99}$$

für

$$c_\mu x_\mu(t) = \sqrt{2}\left(X_\mu \cos\left(p_0 t + \phi_\mu\right)\right) \tag{6.97a}$$

und

$$\underline{X}_\mu = X_\mu e^{j\phi_\mu} \tag{6.97b}$$

lösbar. Für $\boldsymbol{\zeta}_p$ gilt dann:

$$\boldsymbol{\zeta}_p(t) = |\underline{Z}_p| \cos\left(\omega t + \arg \underline{Z}_p\right)$$

11. Beliebige Erregung (58)

Im DGL- System aus Abschnitt (5) gilt:

$$\zeta_{1,p}(t) = \mathbb{F}(t) \int\limits_{t_0}^{t} \mathbb{F}^{-1}(\tau)\mathbb{G}\mathbb{c}x(\tau)\, d\tau$$

Oder im System aus (6) gilt, wobei $\mathbb{x} \neq \mathbb{c} \cdot x(t)$ sein darf:

$$\zeta_{1,p}(t) = \mathbb{F}(t) \int\limits_{t_0}^{t} \mathbb{F}^{-1}\mathbb{G}\mathbb{x}(t)\, d\tau \tag{6.102}$$

12. Gesamtlösung

$$\zeta(t) = \mathbb{F}(t)\mathbb{k} + \zeta_p(t)$$

$\mathbb{k}$ wird anhand der Anfangsbedingungen ermittelt.

Die eventuelle Substitution wird folgendermaßen zurückgenommen:

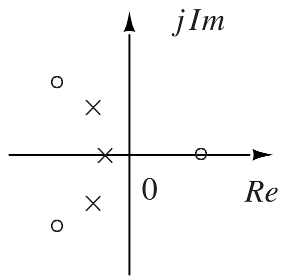
$$\mathbb{z} = \begin{pmatrix} \mathbb{E} & -\mathbb{B} \\ 0 & \mathbb{E} \end{pmatrix} \zeta \tag{6.70b}$$

13. Die Übertragungsfunktion $H(p)$

Die Übertragungsfunktion hat folgende Definition

$$H(p) = \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)}\bigg|_{x(t)=Xe^{pt}} = \mathbb{y}_p\bigg|_{x(t)=Xe^{pt}} = X\frac{E(p)}{D(p)} \tag{6.129}$$

und wird ermittelt, nachdem man eine Eingangs- ($x(t)$) und Ausgangsgröße ($y(t)$) ausgewählt, im Zeigerverfahren $j\omega$ bzw. im DGL- System $\frac{d}{dt}$ durch die komplexe Frequenz p ersetzt hat.
Die Pole von $H(p)$ stimmen mit den Eigenwerten der homogenen Lösung überein, wenn sie sich nicht aus folgenden Gründen mit den Zählerpolynom kürzen lassen: Entweder die zugehörige Mode beeinflusst den Ausgang nicht, sie wird nicht durch den Eingang beeinflusst, oder — natürlich — Beides.



In Diagrammen werden meist die Nullstellen durch Kreise ($\circ$), und die Pole durch Kreuze ($\times$) markiert.
Aus dem Diagramm kann man wiederum $H(p)$, $|H(p)|$ und $\arg(H(p))$ — bis auf die Konstante X von Oben — ermitteln:
Nennen wir q_n die n-te Nullstelle und p_n die m-te Polstelle, so gilt:

$$H(p) = |X|\frac{(p-q_1)(p-q_2)\cdots(p-q_n)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_m)} \tag{6.150}$$

Es sind $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ und $\arg(a \cdot b) = \arg a + \arg b$ bzw. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ und $\arg \frac{a}{b} = \arg a - \arg b$. Es reicht also, die Beträge der Faktoren dieses Produktes in obige Formel einzusetzen, um $\frac{|H(p)|}{|X|}$, und, die Argumente

der Faktoren zu addieren, bzw. subtrahieren, um $\arg H(p)$ zu erhalten. ($X \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg X \in [0;\pi]$)
Ein $(\arg H(p) : p)$- Diagramm wird, wenn p_0 eine Nullstelle von $H(p)$ ist, an der das Argument ja nicht definiert ist, einfach bis $\lim_{p\to p_{0+}}$ und ab $\lim_{p\to p_{0-}}$ weiter gezeichnet, was einen Sprung um π zur Folge hat.

14. Stabilität

Wenn Alle Eigenwerte einen negativen Realteil haben, ist ein Netzwerk asymptotisch stabil. Da einige Moden aber nicht angeregt werden können, reicht laut Hurwitz aus, dass $D(p)$ nur Nullstellen mit $Re < 0$ hat. (Oder — Falls die durch die Anfangsbedingungen verursachten Effekte nicht abklingen, sondern bloß wenigstens endlich bleiben sollen, ≤ 0. Allerdings ist, wenn sich Pol- und Nullstellen mit positivem Realteil gekürzt haben, diese Aussage selber nicht stabil.

Man bringt $D(p)$ in folgende Form:

$$D(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots + c_m p^m$$

Für $m < 3$ ist das Netzwerk stabil, wenn $\mathrm{sign}(c_0) = \cdots = \mathrm{sign}(c_m)$. Diese Faktoren sind schwer zu ermitteln, weswegen man die Lösung über die Hurwitz- Determinante verwendet:
Danach erstellt man die n Hurwitz- Determinanten des $n \times n$- Gleichungssystems:

$$\underset{m\times m}{\Delta_n} = \begin{pmatrix} c_{n-1} & c_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots & & 0 \\ c_{n-2m+1} & c_{n-2m+2} & c_{n-2m+3} & & \cdots & & c_{n-m} \end{pmatrix} \tag{6.156}$$

...und untersucht, für welche Bedingungen diese n Determinanten dasselbe Vorzeichen haben. Wenn $a_n < 0$, die Ganze Gleichung mit -1 multiplizieren. (92)

15. Lösungen der DGLs via Laplacetransformation

Das faszinierende an der Laplace- Transformation: Ableitungen und Integrale werden — lineare Glieder.

Nehmen wir unser Standart- Gleichungssystem

$$\left(\mathbb{G} + \mathbb{H}\frac{d}{dt}\right)\mathbb{z} = \mathbb{x}(t)\ , \tag{6.65}$$

...und transformieren es, so haben wir

$$(\mathbb{G} + \mathbb{H}p)\,Z = \mathcal{L}\{\mathbb{x}(t)\} + \mathbb{z}_1(0_+)\mathbb{h}_1 + \mathbb{z}_2(0_+)\mathbb{h}_2 + \mathbb{z}_3(0_+)\mathbb{h}_3 + \cdots + \mathbb{z}_n(0_+)\mathbb{h}_n\ .^3 \tag{6.184}$$

[3] $\mathbb{h}_{1\ldots n}$ sind die n Spalten der $\mathbb{H}$- Matrix,
$\mathbb{z}_{1\ldots n}(0_+)$ die passenden Anfangswerte für die jeweiligen Energiespeicher

Diese Gleichungen kommen ohne komplexe Zahlen oder Ableitungen aus, sind einfach zu lösen, der Rechenaufwand bei dieser Methode entsteht aber beim Rücktransformieren, weswegen diese Methode hauptsächlich bei wenigen interressierenden Größen von Nutzen ist.

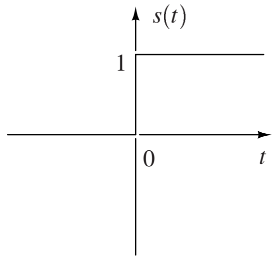


Abbildung 1: $s(t)$

Die kanonische Methode

Eine Laplacetransformierte

$$Z(p) = \frac{A(p)}{(p-p_1)^{r_1} + (p-p_2)^{r_2} + \cdots + (p-p_m)^{r_m}}$$

läßt sich in folgende Form bringen

$$Z_\mu(p) = \left(B_0 = \lim_{p\to\infty} Z_\mu(p)\right) + \sum_{\nu=1}^{r_1} \frac{B_{1\nu}}{(p-p_1)^\nu} + \cdots + \sum_{\nu=1}^{r_m} \frac{B_{m\nu}}{(p-p_m)^\nu}\ , \tag{6.186}$$

wobei r_x die Vielfachheit des x-ten Eigenwerts ist.
Bei nichtstabilen Netzwerken treten additive Therme auf (siehe Buch).

Weiter gilt:

$$B_{\kappa\nu} = \frac{1}{(r_\kappa - \nu)!} \left(\left(\frac{d}{dp}\right)^{r_\kappa - \nu} \left((p-p_\kappa)^{r_\kappa} Z_\mu(p)\right) \right)\Bigg|_{p=p_\kappa} \tag{6.187}$$

...Das mit der $r_\kappa - \nu$-ten Ableitung steht — meines Wissens nach — nicht mal im Bronnstein.

Spezialfall: Ist $r_\kappa = 1$ gilt, wenn

$$Z_\mu(p) = \frac{M(p_\kappa)}{N(p_\kappa)}\ : \tag{6.188}$$

$$B_{\kappa 1} = \frac{M(p_\kappa)}{\frac{dN(p_\kappa)}{dp_\kappa}}$$

Der Rest der Rücktransformation ist Einfach: Alle durch die Partialbruchzerlegung entstehenden und bei Netzwerken normalerweise vorkommenden Brüche sind in Tabelle 16, S.10 verzeichnet (GET II, Anhang E); Einfach einsetzen, fertig.

Die Raum-[4]Methode

Die Laplacetransformierte

$$Z(p) = \frac{P(p)}{(p-p_1)^{r_1} + (p-p_2)^{r_2} + \cdots + (p-p_m)^{r_m}}$$

Kann unter der Annahme

[4]Uns erklärt von Prof. Akad. Dir. Hilmar Raum

$$\frac{P(p)}{(p-p_1)^{r_1}+\cdots+(p-p_m)^{r_m}} = \frac{A_1}{(p-p_1)^1}+\cdots+\frac{X_1}{(p-p_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{A}{(p-p_m)^1}+\cdots+\frac{X}{(p-p_m)^{r_m}}$$

meist einfach gelöst werden, wenn man die Annahme mit dem Nenner des Linken Bruches durchmultipliziert, und dann $p_1 \ldots p_m$ einsetzt, um die Konstanten A-X zu erhalten. Bei mehrfachen Eigenwerten müssen zusätzlich lineare Gleichungssysteme gelöst werden.

Beispiel:

$$\frac{p+1}{(p+2)(p+3)^2} = \frac{A}{p+2}+\frac{B}{p+3}+\frac{C}{(p+3)^2}$$

$$p+1 = A(p+3)^2+B(p+2)(p+3)+C(p+2)$$

$p=-3$

$$-3+1 = C(-3+2) \;\Rightarrow\; C=2$$

$p=-2$

$$-2+1 = A(-2+3)^2 \;\Rightarrow\; A=-1$$

$$\Longrightarrow\; p+1 = -1(p+3)^2+B(p+2)(p+3)-2(p+2)$$

$p=0$

$$1 = -1(3)^2+B(2)(3)+2(2) \;\Rightarrow\; B=1$$

17. Lösungen der DGLs via Fouriertransformation[5] $\mathrm{Re}\, p>0$

Wir transformieren

$$\left(\mathbb{G}+\mathbb{H}\frac{d}{dt}\right)\mathbb{z} = \mathbb{x}(t)\,,$$

und erhalten

$$(\mathbb{G}+j\omega\mathbb{H})\,Z = \mathcal{F}\left\{\mathbb{x}(t)\right\}+\mathbb{z}_1(0_+)\mathbb{h}_1+\mathbb{z}_2(0_+)\mathbb{h}_2+\mathbb{z}_3(0_+)\mathbb{h}_3+\cdots+\mathbb{z}_n(0_+)\mathbb{h}_n$$

Die Fouriertransformation eignet sich für einige Klassen von Funktionen besser als die Laplace- Transformation; Fouriertransformiertentabelle ist auf Seite 11, dort (S. 8ff) auch der Rest der Rechnung.

[5]Dieses Kapitel wurde entnommen von

Einführung in die Systemtheorie

von

Professor Dr.-Ing. Bernhard Girod,
Priv.- Doz. Dr.-Ing. habil. Rudolf Rabenstein und
Dipl.-Ing. Alexander Stenger

16. Die wichtigsten Laplace- Korrespondenzen

Die Regeln

$$s(t)\,f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \mathcal{L}\{f\} = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

$\geq \mathrm{Kb}\{F\}$	$s(t)\dfrac{df(t)}{dt} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; pF(p)-f(0_+)$	$s(t)\int_0^t f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{F(p)}{p}$	$\geq \mathrm{Kb}\{F\}$
$\geq \mathrm{Kb}\,a$	$a(t)+b(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \mathcal{L}\{a\}+\mathcal{L}\{b\}\cap \mathrm{Kb}\,b$	$a(t)\cdot b(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \mathcal{L}\{a\}*\mathcal{L}\{b\}$	$\geq \mathrm{Kb}\,a \cap \mathrm{Kb}\,b$
$\frac{p}{a}\in \mathrm{Kb}\{X\}$	$s(at)\,f(at) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$	$s(t-t_0)\,f(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; e^{-pt_0}\mathcal{L}\{f\}$	Kb gleich
$p+a\in \mathrm{Kb}\{X\}$	$e^{-p_0t}s(t)\,f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F(p+p_0)$	$t^n f(t)s(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; (-1)^n\left(\dfrac{d}{dp}\right)F(P)$	Kb gleich

Transformation von Termen

$p\in\mathbb{C}$	$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; 1$	$s(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{1}{p}$	$\mathrm{Re}\,p>0$
$\mathrm{Re}\,p>-\mathrm{Re}\,\alpha$	$s(t)\,t^n\dfrac{e^{-\alpha t}}{n!} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{1}{(p+\alpha)^{n+1}};\, n\in\mathbb{N}$	$s(-t)\,t^n\dfrac{e^{-\alpha t}}{n!} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; -\dfrac{1}{(p+\alpha)^{n+1}};\, n\in\mathbb{N}$	$\mathrm{Re}\,p<\mathrm{Re}-\alpha$
$\mathrm{Re}\,p>0$	$s(t)\,\cos\beta t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	$s(t)\,\sin\beta t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$\mathrm{Re}\,p>0$
$\mathrm{Re}\,p>-\mathrm{Re}\,\alpha$	$s(t)\,e^{-\alpha t}\cos\beta t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{(p+\alpha)}{((p+\alpha)^2+\beta^2)}$	$s(t)\,e^{-\alpha t}\sin\beta t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{\beta}{((p+\alpha)^2+\beta^2)}$	$\mathrm{Re}\,p>-\mathrm{Re}\,\alpha$
$\mathrm{Re}\,p>0$	$s(t)\,t\cos\beta t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$	$s(t)\,t\sin\beta t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$	$\mathrm{Re}\,p>0$
	$s(t)\,\cos^2\beta t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{p^2+2\beta^2}{p(p^2+4\beta^2)}$	$s(t)\,\sin^2\beta t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{2\beta^2}{p(p^2+4\beta^2)}$	
	$s(t)\,\cosh\beta t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{p}{p^2-\beta^2}$	$s(t)\,\sinh\beta t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$	
	$s(t)\dfrac{\sin\beta t}{t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \arctan\dfrac{\beta}{p}$	$\dfrac{s(t)}{\sqrt{\pi t}} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{1}{\sqrt{p}}$	
	$s(t)\,2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{1}{p\sqrt{p}}$	$s(t)\,\dfrac{t^n}{n!} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \dfrac{1}{p^{n+1}};\, n\in\mathbb{N}$	$\mathrm{Re}\,p>0$

Tabelle 1: Laplacetransformierte

18. Die wichtigsten Fourier- Korrespondenzen

Die Regeln

$$f(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \mathcal{F}\{f\} = F\,j\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt$$

$\frac{d\,f(t)}{dt} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; j\omega F(j\omega)$	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{j\omega}F(j\omega)+\pi\delta(\omega)F(0)$
$a(t)+b(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \mathcal{F}\{a\}+\mathcal{F}\{b\}$	$a(t)*b(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \mathcal{F}\{a\}\cdot\mathcal{F}\{b\}$
$f(at) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \left\lvert\frac{1}{a}\right\rvert F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$	$f(t-t_0) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j\omega t}F(j\omega)$
$e^{j\omega_0 t}f(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F(j\omega - j\omega_0)$	$t^n f(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; (-1)^n\left(\frac{d}{dp}\right)^n F(j\omega)$
$F(jt) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi f(-\omega)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(j\omega)\rvert^2 d\omega$
$x(-t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X(-j\omega)$	$x^*(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X^*(j\omega)$

Transformation von Termen

$\delta(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; 1$	$s(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; p\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$\mathrm{rect}(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{si}\left(\frac{\omega}{2}\right)$	$\frac{1}{T}\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp\left(\frac{t}{T}\right) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$\frac{1}{t} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; -j\pi\,\mathrm{sign}(\omega)$	$e^{j\omega_0 t} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \pi\left(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right)$	$\sin(\omega_0 t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; j\pi\left(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right)$
$e^{-a\lvert t\rvert} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad a>0$	$e^{-a^2t^2} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$

Tabelle 2: Fouriertransformierte