Mathematische Grundlagen

Das Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \qquad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \det\begin{pmatrix} \vec{a} \bullet \vec{c} & \vec{a} \bullet \vec{d} \\ \vec{b} \bullet \vec{c} & \vec{b} \bullet \vec{d} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) \qquad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \bullet \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \bullet \vec{\omega})$$

Das Skalarprodukt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a^T b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \overline{\vec{b} \bullet \vec{a}} \qquad \vec{a} \bullet \left(\vec{b} x_1 \vec{c} x_2\right) = \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) x_1 + (\vec{a} \bullet \vec{c}) x_2$$

grad, div und rot

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} \\ \frac{d}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{d}{dx_n} \end{pmatrix} \qquad \vec{\Delta} = \nabla^2 = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx_1^2} \\ \frac{d^2}{dx_2^2} \\ \vdots \\ \frac{d}{dx_n^2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx_1} \\ \frac{df}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{df}{dx_n} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{dv_1}{dx_1} + \frac{dv_2}{dx_2} + \cdots \frac{dv_n}{dx_n} = \vec{\nabla}^T \vec{v}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} \\ \frac{d}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{d}{dx_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

Stösse

Stoßintegral J

$$J = \int_{(t_S)} \vec{F}\,dt \tag{3.31}$$

(53)

Vollelastischer Stoß

$$\begin{aligned} V_1 &= v1 + \tfrac{2m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) \\ V_2 &= v2 + \tfrac{2m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) \end{aligned} \tag{3.39}$$

(54)

Vollplastischer Stoß

$$V_1 = V_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{3.34}$$

(55)

Realer Stoß

$$\begin{aligned} V_1 &= v_1 + \tfrac{m_2}{m_1+m_2}\left(\left(\tfrac{m_1}{m_2} - \varepsilon\right) v_1 + (1+\varepsilon)v_2\right) \\ V_2 &= v_2 + \tfrac{-m_1}{m_1+m_2}\left(\left(\tfrac{m_2}{m_1} - \varepsilon\right) v_1 + (1+\varepsilon)v_2\right) \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\varepsilon = \frac{V_2 - V_1}{v_1 - v_2} \qquad \left(\varepsilon \in [0\dots 1]; \quad \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \Rightarrow \text{vollplastischer Stoß} \\ \varepsilon = 1 \Rightarrow \text{vollelastischer Stoß} \end{array}\right) \tag{3.40}$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}\left(1 - \varepsilon^2\right); \, v_2 = 0 \tag{3.44}$$

Zentrale Drehstösse

(95)

Vollelastischer Stoß

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega + \tfrac{2J_2}{J_1+J_2}(\omega_2 - \omega) \\ \Omega_2 &= \omega_2 + \tfrac{2J_1}{J_1+J_2}(\omega - \omega_2) \end{aligned} \qquad \text{(Nach 3.39)}$$

Vollplastischer Stoß

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2} \tag{Nach 3.34}$$

Realer Stoß

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \omega_1 + \tfrac{J_2}{J_1+J_2}\left(\left(\tfrac{J_1}{J_2} - \varepsilon\right)\omega_1 + (1+\varepsilon)\,\omega_2\right)\\ \Omega_2 &= \omega_2 + \tfrac{-J_1}{J_1+J_2}\left(\left(\tfrac{J_2}{J_1} - \varepsilon\right)\omega_1 + (1+\varepsilon)\,\omega_2\right)\end{aligned} \tag{Nach 3.39}$$

$$\varepsilon = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \tag{96}$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{J_1}{J_2}}\left(1 - \varepsilon^2\right);\ \omega_2 = 0 \tag{Nach 3.44}$$

Exzentrischer Stoß

$$\begin{aligned}m_1\vec{V}_{S1} - m_1\vec{v}_{S1} &= +\int_{t_S}\vec{F}(t)dt = +J\\ m_1\vec{V}_{S2} - m_1\vec{v}_{S2} &= -\int_{t_S}\vec{F}(t)dt = -J\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}J_{S1}\Omega_1 - J_{S1}\omega_1 &= +\left|\int_{t_S}\left(\vec{r}_1 \times \vec{F}(t)\right)\right| &&= +a_1J\\ J_{S2}\Omega_2 - J_{S2}\omega_2 &= -\left|\int_{t_S}\left(\vec{r}_2 \times \left(-\vec{F}(t)\right)\right)\right| &&= -a_2J\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\varepsilon = \frac{V_{2N} - V_{1N}}{v_{1N} - v_2N} \tag{5.51}$$

Drehung (59ff, 84ff)

$$\begin{array}{ccc} \text{X-Achse} & \text{Y-Achse} & \text{Z-Achse} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{-}\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \text{-}\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{-}\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$L = \vec{r} \times \vec{p} \tag{3.46}$$

$$M = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3.47}$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \Rightarrow \vec{M} = J\dot{\vec{\omega}} \tag{5.6}$$

Zentripetalkraft

$$F_Z = m\omega^2 \vec{r} = m\frac{\vec{v}}{r}$$

Steiner

$$J_A = J_S + m\,r^2 \qquad (5.12)$$

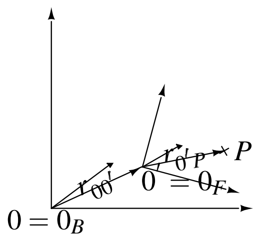
Steiner-Huygens

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{xx} + m\left(y_s^2 + z_s^2\right) & J_{xy} - m\left(x_s y_s\right) & J_{xz} - m\left(x_s z_s\right) \\ J_{yx} - m\left(y_s x_s\right) & J_{yy} + m\left(x_s^2 + z_s^2\right) & J_{yz} - m\left(y_s z_s\right) \\ J_{zx} - m\left(x_s z_s\right) & J_{zy} - m\left(y_s z_s\right) & J_{zz} + m\left(x_s^2 + y_s^2\right) \end{pmatrix} \qquad (5.79)$$

Massenträgheitsmomente (89ff)

Gegenstand	J_S
Walze um Symmetrieachse	$\frac{1}{2}mR^2$
- senkrecht dieser	$\frac{1}{4}m\left(R^2 + \frac{1}{3}l^2\right)$
Rohr	$\frac{1}{2}m\left(R_a^2 + R_i^2\right)$
- dünnwandiges	mR^2
Stab, aufgehängt am Anfang	$\frac{1}{3}ml^2$
Stab, mittig aufgehängt	$\frac{1}{3}mr^2$
Dünne Scheibe, um Symmetrieachse	$\frac{1}{2}mR^2$
- um Andere Achse	$\frac{1}{4}mR^2$
Kugel	$\frac{2}{5}mR^2$

Bewegung des Führungssystems (x_F) im Bezugssystem (x_B) (12)



$$\vec{r} = \vec{r}_{0_B 0_F} + \vec{r}_{0_F P}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_{0_B 0_F}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{0_F P}}{dt} + \omega_F \times \vec{r}_{0_F P}$$

(2.32 – 2.34)

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}_{0_B 0_F}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_{0_F P}}{dt^2} + \frac{d\omega_F}{dt} \times \vec{r}_{0_F P} + \omega_F \times \left(\omega_F \times \vec{r}_{0_F P}\right)$$

Die Euler- Gleichungen

$$J = \begin{pmatrix} J_I & 0 & 0 \\ 0 & J_{II} & 0 \\ 0 & 0 & J_{III} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} M_I \\ M_{II} \\ M_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_I \, \dot{\omega}_I - (J_{II} - J_{III})\, \omega_{II}\, \omega_{III} \\ J_{II} \, \dot{\omega}_{II} - (J_{III} - J_I)\, \omega_{III}\, \omega_I \\ J_{III} \, \dot{\omega}_{III} - (J_I - J_{II})\, \omega_I\, \omega_{II} \end{pmatrix} \qquad (5.109$$

Häufig benutzte Begriffe

Arbeitssatz
$$E = \tfrac{1}{2} m v_{0'}^2 + \tfrac{1}{2} \vec{L}_{0'} \vec{\omega} + m \vec{\omega} \left(\vec{r}_{0'S} \times \vec{v}_{0'} \right)$$
$$E = \tfrac{1}{2} m v_S^2 + \tfrac{1}{2} \vec{L}_S \vec{\omega} \qquad (123)$$
$$E = \tfrac{1}{2} m \vec{L}_A^2$$
(Konservative Felder/ Vorgänge)

Energiesatz
$$E_{t_1} - E_{t_0} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \vec{v}_S \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \vec{M} \vec{\omega} \, dt \qquad (124)$$
$$E_{t_1} - E_{t_0} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \, d\vec{r}_S + \int_{t_0}^{t_1} \vec{M} \vec{\omega} \, dt$$

Schwerpunktsatz $\vec{F} = m a_S$ (5.52)

Momentensatz
$$\dot{\vec{L}}_{0'} = \vec{M}_{0'} + m(\vec{a}_{0'} \times \vec{r}_{0'S})$$
$$\dot{\vec{L}}_S = \vec{M}_S \qquad (S.\ 111ff)$$
$\dot{\vec{L}}_{0'} = \vec{M}_{0'}$, wenn $0'$ unbeschleunigt und körperfest

Impulssatz $\vec{p}_S(t_1) - \vec{p}_S(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt$ (104)

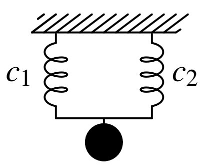
Drehimpulssatz
$$\vec{L}_S(t_1) - \vec{L}_A(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_S(t) dt \qquad (104)$$
$$\vec{L}_A(t_1) - \vec{L}_A(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_A(t) dt$$

D' Alembert'sches Prinzip	Alle Kräfte auf Körper + Trägheitskraft = 0
Momentalpol	Punkt eines Körpes, der keine Translationsbewegung ausführt
Rastpolbahn	Die Bahn des Momentanpols
Gangpolbahn	Man nimmt dem Momentalpol zur Zeit $t = t_0$, und zeichnet die Bahn dieses körperfesten Punktes auf.

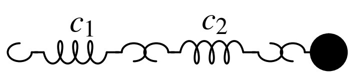
Federn/Dämpfer

Federn

$$F = c \cdot x$$

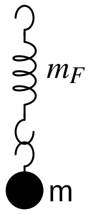


$c = c_1 + c_2$



$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \qquad (171)$$

Berücksichtigung der Federmasse



$$m_{Ges} \mathrel{\hat{=}} m + \frac{1}{3} m_F \tag{173}$$

Dämpfer

$$F = k \cdot \dot{x}$$

Parallel- / Reihenschaltung wie bei der Feder.

Schwingungen

$$2D\omega = \frac{k}{m};\ \omega^2 = \frac{c}{m} \tag{6.22; 155}$$

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + x = 0 \tag{6.23}$$

$$\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2 x = f(t) \tag{6.32/ 6.33}$$

Rechte Seiten bei

Erregung über Feder

$$f(t) = 2D\omega^2 x_0 \cos\Omega t;\ x_0 = \frac{F_0}{c} \tag{S. 161}$$

Erregung über Dämpfer

$$f(t) = x_0 \omega^2 \eta^2 \cos\Omega t;\ \eta = \frac{\Omega}{\omega} \tag{S. 161}$$

Rotierende Unwuchten (Rotationsfrequenz Ω, Masse m_0)

$$f(t) = 2D\omega^2 x_0 \cos\Omega t;\ \eta = \frac{\Omega}{\omega};\ X_0 = \frac{2m_0}{m} r \tag{S. 162}$$

Auswuchten (139)

statisch: Schwerpunkt S auf Drehachse

$$\Rightarrow S = \frac{\int\limits_{(K)} r\,dm}{\int\limits_{(K)} dm}$$

dynamisch: Hauptachse auf Drehachse

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix}$$

Einheiten

$[F] = 1N = 1kg\frac{m}{s^2} = 1\frac{J}{m}$	$[P] = 1N = 1J = 1Nm = 1Ws$	$[W] = [E] = 1Js$
$[J] = kg\,m^2$	$[M] = Nm$	$[\omega] = [f] = \frac{1}{s}$

Feder	Dämpfer
$[c] = \frac{N}{m}$	$[c] = \frac{Ns}{m}$

Warnung

Diese Formelsammlung, die vollständig auf dem

Scriptum zur Vorlesung
TECHNISCHE MECHANIK
von
Prof. Dr.- Ing. habil. G. Kuhn

basiert, kann und soll — ebensowenig wie dieses die Vorlesung oder Übungen ersetzen.
Diese Formelsammlung erhebt außerdem nicht den Anspruch auf Fehlerfreiheit oder Vollständigkeit, da sie nur für meinen Privatgebrauch gedacht ist.

Fehler bitte an mich melden: Ist auch zur Kontrolle meinerseits gedacht.

Gunter Königsmann ⟨gunter.königsmann@gmx.de⟩

[0]Benennungskonventionen:

L_S	L bezogen auf den Schwerpunkt
L_A	L bezogen auf den Raum- und körperfesten Punkt A
$L_{0'}$	L bezogen auf den beliebigen Punkt $0'$
J_N	Der Anteil von J in Richtung der Stoßnormalen