Systemtheorie

———(Stand 25. März 2001)———

Systemtheorie

Variablen

$$\mathbb{y} = \mathbb{c}^T \mathbb{z} + \mathbb{d}\mathbb{x}$$
$$\dot{\mathbb{z}} = \mathbb{A}\mathbb{z} + \mathbb{b}\mathbb{x}$$

Mathematische Grundlagen

$a * b$

$$\begin{aligned} x * y &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) y(\tau)\, d\tau \\ x * (y * z) &= (x * y) * z \\ x * (y + z) &= x * y + x * z \\ x * z &= z * x \end{aligned}$$

$e^{\mathbb{A}t}$

$$\mathbb{A} = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \;\Rightarrow\; e^{\mathbb{A}t} = \operatorname{Diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$$
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbb{A}t} = \exp \begin{pmatrix} e^{\mathbb{A}_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbb{A}_2 t} \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{A} = \mathbb{M}^{-1} D \mathbb{M} \quad \Rightarrow e^{\mathbb{A}t} = \mathbb{M}^{-1} e^{Dt} \mathbb{M}$$

Cayley- Hamilton (87)

$$e^{\mathbb{A}t} = \alpha_0 E + \alpha_1 \mathbb{A} + \alpha_2 \mathbb{A}^2 + \cdots$$
$$e^{p_\mu t} = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 +^2 + \cdots$$

Bei Jordankästchen der Ordnung m zu p_μ erhält man durch Differenzieren der Unteren Gleichung m weitere Gleichungen.

$$\exp \underset{m\times m}{\mathbb{J}} = e^{pt} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & \frac{t}{1!} & \ddots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & 1 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.84b}$$

0

Allgemein gilt: t_0=0

Benennungskonventionen

$\mathbb{Matritzen/Vektoren}$

$$\mathbb{J} = \underbrace{\begin{pmatrix} p & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & p & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Jordankästchen}} \quad \mathbb{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix in Forbeniusform}}$$

$$s(t)e^{\mathbb{A}t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ (pE-\mathbb{A})^{-1}$$

DGL ⇒ ZGL

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n y+\alpha_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} y+\cdots+\alpha_0 y=\left(\frac{d}{dt}\right)^n \beta_n x+\cdots+\beta_0 x$$

Die Steuerungsnormalform

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \quad \mathbb{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (2.32 a-d)

$$\mathbb{c}=\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{d}=0$$

Bedingung für Steuerbarkeit:

Der Rang von

$$U=\begin{pmatrix} \mathbb{c}^T \\ \mathbb{c}^T\mathbb{A} \\ \vdots \\ \mathbb{c}^T\mathbb{A}^{n-1} \end{pmatrix}$$

ist maximal.

Steuerbar heisst, z_μ kann vom Eingang aus direkt (nicht über z_ν; $\mu \neq \nu$) angeregt werden. (103 ff.)

Die Beobachtungsnormalform

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \cdots & -\alpha_n \end{pmatrix} \quad \mathbb{b}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$ (2.35 a-d)

$$\mathbb{c}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{d}=0$$

Bedingung für Beobachtbarkeit:

Der Rang von

$$V=\begin{pmatrix} \mathbb{b} & \mathbb{A}\mathbb{b} & \mathbb{A}^2\mathbb{b} & \cdots & \mathbb{A}^{n-1}\mathbb{b} \end{pmatrix}$$

ist maximal.

Beobachtbar heisst, aus $\mathbb{c}$, x und y ist z_μ eindeutig über $y-y(0)=\mathbb{c}\,e^{\mathbb{A}t}$ bestimmbar. (111)

$\beta_n \neq 0$

$$\text{subst } \tilde{\mathbb{y}}=\mathbb{y}-\beta_n\mathbb{x}$$

Ähnlichkeitstransformationen mit $\mathbb{A}$

$$\widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{M} \quad \widetilde{\mathbb{b}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{b}$$
$$\widetilde{\mathbb{c}} = \mathbb{c}\mathbb{M} \quad \widetilde{\mathbb{d}} = \mathbb{d} \qquad (2.44\ \text{a-d})$$

Diagonalisierung

$$\mathbb{M} = (v_1|v_2|\cdots|v_n)$$

v_1–v_n sind die n Eigen- und Hauptvektoren von $\mathbb{A}$. (Vorlesung am 21. 7. 2000)

Wenn $\mathbb{A}$ in Frobeniusform (Siehe Normalformen):

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ p_1 & \cdots & p_n \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ p_1^{n-1} & \cdots & p_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(automatisch) konjugiert komplexe $\mathbb{A}$

$$\mathbb{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E & -jE \\ E & jE \end{pmatrix} \quad \mathbb{M}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E & E \\ jE & -jE \end{pmatrix} \qquad (2.52\ \text{a,b})$$

verwandelt

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{J} & 0 \\ 0 & \mathbb{J}^\star \end{pmatrix} \text{ und } \mathbb{b} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{b}} \\ \widetilde{\mathbb{b}}^\star \end{pmatrix}$$

zu

$$\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\mathbb{J} & \operatorname{Im}\mathbb{J} \\ -\operatorname{Im}\mathbb{J} & -\operatorname{Re}\mathbb{J} \end{pmatrix} \text{ und } \mathbb{M}^{-1}\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}\widetilde{\mathbb{b}} \\ 2\operatorname{Im}\widetilde{\mathbb{b}} \end{pmatrix} \qquad (84,\ \text{unter } 2.52)$$

‚Frobenisierung‘ von $\mathbb{A}$

$$\mathbb{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{c}^T \\ \mathbb{c}^T\mathbb{A} \\ \vdots \\ \mathbb{c}^T\mathbb{A}^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \widetilde{\mathbb{c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{c}^T \\ \mathbb{c}^T\mathbb{A} \\ \vdots \\ \mathbb{c}^T\mathbb{A}^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \widetilde{\mathbb{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{M} = \left(\mathbb{b}\ \mathbb{A}\mathbb{b}\ \mathbb{A}^2\mathbb{b}\ \cdots\ \mathbb{A}^{n-1}\mathbb{b}\right) \qquad \Rightarrow \widetilde{\mathbb{b}}^T = (1\ 0\ \cdots\ 0)$$

$$\mathbb{M}^{-1} = \left(\mathbb{b}\ \mathbb{A}\mathbb{b}\ \mathbb{A}^2\mathbb{b}\ \cdots\ \mathbb{A}^{n-1}\mathbb{b}\right)\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \widetilde{\mathbb{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2.274a, 2.279, **2.286**)

ZGL $\Rightarrow\ \mathbb{y}(t)$

Der Zeitinvariante Fall

$$\mathbb{z}(t) = \Phi(t)\mathbb{z}(0) + \int_0^t \Phi(t)\mathbb{b}\mathbb{x}(\tau)d\tau \tag{2.65}$$

Zeitvariant:

Die homogene DGL

Mit $\mathbb{x}(t) = 0\ \forall t$ und $t_0 = 0$ gilt

$$\mathbb{z}_h = e^{\mathbb{A}(t)t}\mathbb{z}_h(0) \tag{2.55, 2.90}$$

mit der Übergangsmatrix

$$\Phi(t) = e^{\mathbb{A}t}$$

Der Inhomogene Teil (Variation der Konstanten)

$$\mathbb{z}_p(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)\,\mathbb{b}(\tau)\,\mathbb{x}(\tau)\,d\tau \tag{2.100}$$

Die Gesamtlösung

$$\mathbb{z}(t) = \mathbb{z}_h(t) + \mathbb{z}_p(t) \tag{2.94}$$

Systemcharakteristiken

Die Übertragungsfunktion

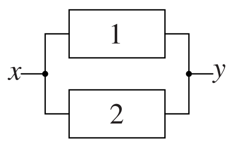
$$H(p) = \tfrac{\beta_0+\beta_1 p+\beta_2 p^2+\cdots+\beta_n p^{n-1}}{\alpha_0+\alpha_1 p+\alpha_2 p^2+\cdots+p^{n-1}}$$

$$H(p) = \tfrac{\gamma_1}{p} + \tfrac{\gamma_2}{p^2} + \cdots + \tfrac{\gamma_n}{p^n};\ \gamma = \mathbb{b} \qquad \text{aus Beobachtungsnormalform}$$

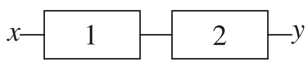
$$H(p) = \frac{\mathbb{y}(p)}{\mathbb{x}(p)} = \mathbb{c}^T\left(pE - \mathbb{A}\right)^{-1}\mathbb{b} + \mathbb{d}$$

$$H(t) = s(t)\mathbb{c}^T e^{\mathbb{A}t}\mathbb{b} + \delta(t)\mathbb{d} \tag{2.116}$$

$$H(\mathbb{A}, \mathbb{b}, \mathbb{c}^T, \mathbb{d}) = H(\mathbb{A}^T, \mathbb{c}, \mathbb{b}^T, \mathbb{d})$$



$$H = H_1 + H_2 \tag{1.64, 1.63}$$



$$H(p) = H_1(p)\cdot H_2(p)$$
$$H(t) = H_1(t) * H_2(t)$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{3.3}$$

Impulsantwort $h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{1.61}$$

Sprungantwort $a(t)$

$$a(t) = \int_{t}^{\infty} h(t-\tau)\,d\tau \tag{1.46}$$

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} a(t) = \lim_{p\to 0} H(p) \qquad \text{wenn } x(t) \text{ konstant für } t \longrightarrow \infty$$

Stabilität

$$\det \lambda_E - \mathbb{A} = p^n + a_1 p^n - 1 + \cdots a_n$$

Die Hurwitz- Determinante

$$\Delta_\mu = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots & & 0 \\ a_{2\mu-1} & a_{2\mu-2} & a_{2\mu-3} & & \cdots & & a_\mu \end{pmatrix} \tag{2.179}$$

Das System ist asymptotisch stabil, wenn $\Delta_\mu > 0 \;\forall\, \mu \in (1\ldots n)$
Notwendig: $a_n > 0 \;\forall\, a_\nu$

Das Liénard-Chipart-Kriterium (131)

Wenn Alle $a_\nu > 0$, so reicht $\Delta_\mu > 0 \;\forall$ geraden oder ungeraden μ.

Das Routh'sche Verfahren (130)

(Empfohlen, wenn die Zahlenwerte der a_μ bekannt sind.)

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \cdots \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & \cdots \\ \cdots & & & & & \end{array} \tag{130}$$

$$d_1 = \frac{1}{b_1}\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix};\; d_2 = \frac{1}{b_1}\begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix};\; d_3 = \frac{1}{b_1}\begin{pmatrix} b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_4 \\ c_4 \end{pmatrix};\; \cdots$$

$$e_1 = \frac{1}{c_1}\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix};\; e_2 = \frac{1}{c_1}\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix};\; e_3 = \frac{1}{c_1}\begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_4 \\ d_4 \end{pmatrix};\; \cdots$$

Das System ist asymptotisch stabil, wenn $b_1 > 0,\; c_1 > 0,\; d_1 > 0,\; \ldots$

Laplacetransformation

$$\mathbb{z}(t) = \int_0^t \Psi(t-\tau)\mathbb{x}(\tau)\,d\tau \tag{2.206}$$

$$\Psi(t) = \Phi(t)\mathbb{b}(0) \tag{2.201}$$

Wenn $\mathcal{L}\{\Psi\}(p)$ beschränkt $\forall\; p > 0$, ist das System stabil.

Stabilität des Erregten vs. des unerregten Systems

Wenn das Netzwerk linear und steuerbar ist, sind Beide Eigenschaften gleichwertig. (140)

WARNUNG

Diese Formelsammlung ist — wie unschwer zu erkennen — zum Großem Teil aus

Systemtheorie 1
Prof. Dr.- Ing. Dr. H.c. Rolf Unbehauen
Springer Verlag

abgetippt worden. Daher auch die Quellenangaben.

Obwohl ich Alles mehrfach nachgeprüft habe, will ich keinerlei Garantie auf meine Arbeit geben.